氏　　　　名	岩　元　誠　一
生　年　月　日	
本　　　　籍	鹿児島県
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	博甲第666号
学位授与の日付	平成16年3月25日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第4条第1項）
学位授与の題目	On the first subconstituent of a quadratic forms scheme. (Quadratic forms scheme の第一近傍について)
論文審査委員(主査)	伊藤　達郎（理学部・教授）
論文審査委員(副査)	伊藤　秀一（理学部・教授）山田美枝子（理学部・教授） 菅野　孝史（理学部・教授）野村　明人（工学部・講師）

学 位 論 文 要 旨

Abstract

Let q be a power of an odd prime and let $GF(q)$ denote the finite field of q elements. Let n be a natural number ($n \geq 3$) and let X denote the set of symmetric matrices over $GF(q)$ of size n. For an integer i ($0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$), let X_i denote the subset of X that consists of matrices in X of rank $2i-1$ or $2i$. Let R_i ($0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$) be a relation on X defined by $(M, M') \in R_i \Longleftrightarrow M' - M \in X_i$, *i.e.*, $rank(M'-M) = 2i-1, 2i$. Then we have a P- and Q-polynomial association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}})$, which is called the *quadratic forms scheme.* The subset X_i is called the *ith subconstituent.* As a step to find the eigenvalues of the first subconstituent X_1 of a quadratic forms scheme, we determine the orbits of $GL_n(q)$ acting on $X_1 \times X_1$.

代数的組合せ論において、P- and Q-polynomial association scheme という概念がある。これは rank 1 の離散的対称空間ともいうべきもので、association scheme のなかでも中心的な対象であり、その分類が Terwilliger algebra の表現論を用いて進展中である。本論文は、その中の quadratic forms scheme に対してのアプローチである。

q を奇素数べきとして、X を $GF(q)$ 上の n 次対称行列全体とする。R_i を

$$(M, M') \in R_i \Leftrightarrow rank(M' - M) = 2i - 1, 2i$$

として定義される X 上の関係とする。このとき配列 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}})$ を *quadratic forms scheme* といい、

$$X_i := \{M \in X \mid rank M = 2i - 1, 2i\}$$

を *i th subconstituent* という。

$x \in X$ を固定し、A_i を i th associate matrix（関係 R_i の隣接行列）、$E_i^* = E_i^*(x)$ を $(E_i^*)_{zz} = (A_i)_{xz}$ で定まる対角行列とおく。$T = < A_i, E_j^* \mid 0 \leq i, j \leq \frac{n+1}{2} >$ を $\mathcal{X}$ の *Terwilliger algebra* という。

$W(W \subset C^{|X|})$ を irreducible T-module とする。W の *endpoint* を $min\{i|E_i^*W \neq 0\}$ で定める。W が *thin* であるとは、$dim(E_i^*W) \leq 1$ (all i) であるときをいい、全ての irreducible T-module が thin であるときに、$\mathcal{X}$ を thin という。

quadratic forms scheme は non-thin なクラスに属する P- and Q-polynomial association scheme で、その他には bilinear forms scheme、alternating forms scheme、Hermitian forms scheme と Doob scheme が non-thin なクラスに属することが知られている。

endpoint 1 の irreducible T-module は $\mathcal{X}$ の first subconstituent の固有値で決まることが知られており、その決定は P- and Q-polynomial association scheme の分類において重要である。quadratic forms scheme 以外の classical forms scheme については first subconstituent の固有値は求められており、本論文は quadratic forms scheme の場合への最初のアプローチである。

$G = GL_n(q)$ は $\mathcal{X}$ の first subconstituent X_1 上に $M \to {}^tgMg(g \in G, M \in X_1)$ として作用し、$X_1 \times X_1$ 上にも自然に作用する。$\{R_i^*\}$ を $X_1 \times X_1$ 上の G 軌道全体とするとき、$\mathcal{X}^* = (X_1, \{R_i^*\})$ は coherent confuguration になる。これは association scheme より広いクラスの組合せ論的対象であり、association scheme $\mathcal{X}$ は coherent configuration $\mathcal{X}^*$ の fusion scheme として再構成される。

$\Gamma = (X_1, R_1|_{X_1 \times X_1})$ を X_1 上の graph とする。$\mathcal{X}$ の first subconstituent の固有値とは、Γ の固有値のことをいう。Γ の固有値は $\mathcal{X}^*$ の combinatorial parameter により計算可能であり、$\mathcal{X}^*$ の組合せ論的構造を調べることにより Γ の固有値を求めることが我々の基本的方針である。本論文ではこのための最初のステップとして、$X_1 \times X_1$ 上の G 軌道を求めた。

G 軌道は 6 個のタイプに分かれ、それぞれのタイプの G 軌道は、本論文の定理 3.1 から定理 3.6 に記述した。

学位論文審査結果の要旨

提出された学位論文ならびに学位申請書類にもとずき、2 月 10 日審査会を開催し、口頭発表、面接審査を行ったうえ、以下の通り判定した。

本論文は、有限体 Fq（q は奇素数冪）上定義された quadratic forms scheme の第一近傍の上で、GLn（q）の作用（非可遷）が定める coherent configuration の relations を決定したものである。

classical forms scheme の parameters による特徴付けは、代数的組合せ論の中で重要な位置を占めているが、表現論的アプローチにおいて（特に Terwilliger algebra の表現において）第一近傍の固有値がまず問題になる。classical forms scheme のうち、quadratic forms scheme の第一近傍だけが、まだ解明されておらず、固有値もまだ分かっていない。本論文は、quadratic forms scheme の第一近傍上の coherent configuration の relations を完全に決定しており、次のステップである
(1) intersection numbers の決定、(2) 固有値の決定 に必要不可欠なデータを提供している。

本論文は、relations を明解に表記する数学的工夫をしたうえで、根気良く計算を遂行し、以後の研究の基礎データを与えるものであり、十分学位に値すると判定した。